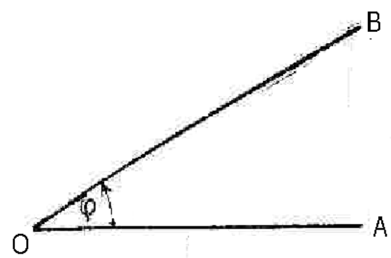
Ing.Agr.Michel Koolhaas, M.Sc.
Prof.Adjunto.

Elementos de Trigonometría

1. Introducción. La Trigonometría es una parte de las matemáticas cuyo conocimiento es fundamental para el dominio de la técnica o disciplina topográfica, por dicho motivo preparamos estas notas de repaso para los estudiantes de la materia. Para ello hemos recurrido a tomar imágenes de los textos clásicos del Ing.M.Copetti los cuales utilizamos en nuestra formación liceal y preuniversitaria.

2. Ángulos y su Medida.

En Trigonometría se considera un ángulo como engendrado por la rotación de una semirrecta que gira alrededor de su origen, supuesto fijo y manteniéndose siempre en el mismo plano. Así por ejemplo, la semirrecta OA



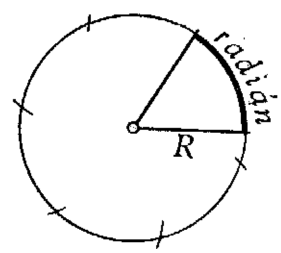
al girar en el sentido indicado por la flecha y pasar de la posición inicial OA a la final OB describe el ángulo A O B que llamamos ángulo φ. El ángulo de la figura también puede suponerse descrito por la semirrecta OB al girar en sentido contrario, es decir, en sentido horario. Si uno de los sentidos se considera positivo el contrario deberá ser negativo.
En Trigonometría se ha convenido en tomar como sentido *positivo* el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Después veremos que la llamada convención angular de los topógrafos llama sentido positivo al sentido horario.

Conviene recordar, que un ángulo cualquiera tiene también por medida el arco correspondiente, es decir, el que tiene por centro el vértice del ángulo . En Trigonometría se emplean tres unidades de medida de ángulos (o de arcos), que originan los tres sistemas de medidas siguientes : sexagesimal, centesimal y el circular.

El sistema sexagesimal toma como unidad del arco el grado sexagesimal, o sea el círculo se divide en 360 partes y el grado sexagesimal es 1 /360 parte de la circunferencia a la que pertenece el arco que se trate de medir. El grado a su vez, se divide en 60 minutos, los minutos en 60 segundos. Así un ángulode 54 grados, 34 minutos y 26 segundos, lo escribiremos 54º34´26”. Este sistema se emplea en las aplicaciones prácticas de la Trigonometría y también generalmente en Topografía.

En el sistema centesimal la unidad de medida de arco es el grado centesimal, que es la 1/400 parte de la circunferencia a que pertenece el arco que se trata de medir. Así un ángulo de 86 grados, 26 minutos y 84 segundos en el sistema centesimal se escribe como $86^g, 2684$ Este sistema angular se utiliza en la Geodesia por su mayor precisión y por ende también se impulsa en la Topografía, sin embargo en el Curso seguiremos utilizando la convención sexagesimal como es de amplia mayoría su uso en América del Sur. Además es notoria y ampliamente predominante el sistema sexagesimal en los instrumentos topográficos existentes, incluidos los disponibles en Facultad. Los teodolitos digitales primero y después las Estaciones Totales admiten la posibilidad de seleccionar el sistema de medida angular preferido, como así también el tipo de ángulo en el caso de ángulos verticales.

En el sistema circular se toma como unidad el arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia a que pertenece.



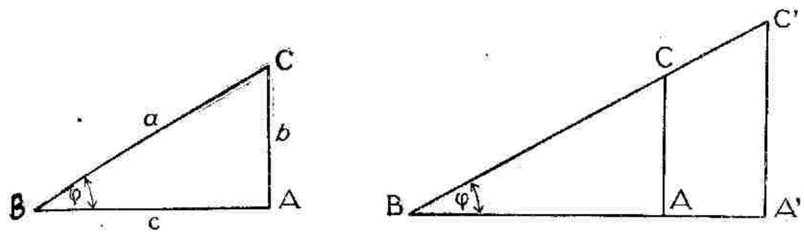
Esto equivale a decir que se mide el arco como una longitud cualquiera, tomando el radio de la circunferencia como unidad de medida de longitud, esta unidad se llama radián. Como la longitud de la circunferencia de radio R está expresada por $C = 2\pi R$, por tanto $C / R = 2\pi$, o sea, que la circunferencia contiene 2π radianes. Este sistema de medida se emplea generalmente en cuestiones teóricas dado que simplifica notaciones.

3. Funciones Trigonométricas

Dado un ángulo se puede definir sus líneas o funciones trigonométricas coseno y seno como las razones del cateto adyacente y opuesto a la hipotenusa ; y tangente a la razón del cateto opuesto al adyacente.

Como en un triángulo cualquiera la suma de los tres ángulos interiores es igual a 180º, en un triángulo rectángulo los ángulos no rectos deben ser agudos y complementarios.
Dado un ángulo agudo φ , se lo puede considerar siempre como uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y definir así sus líneas trigonométricas

Cos φ = B A / BC   Sen φ = AC / BC
Cos φ = c / a   Sen φ = b / a



Tg φ = AC / BA
Tg φ = b / c
Las razones inversas se llaman respectivamente, secante, cosecante y cotangente

Sec φ = BC / BA   Cosec φ = BC / AC   Cotg φ = BA / AC

Esta razones son independientes del triángulo rectángulo elegido y dependen sólo del ángulo φ ; en efecto, para los triángulos rectángulos BAC y BA´C´ que son semejantes por tener ángulos respectivamente iguales, se tiene por ejemplo

CA/ BC = CA´/ BC´ = sen φ

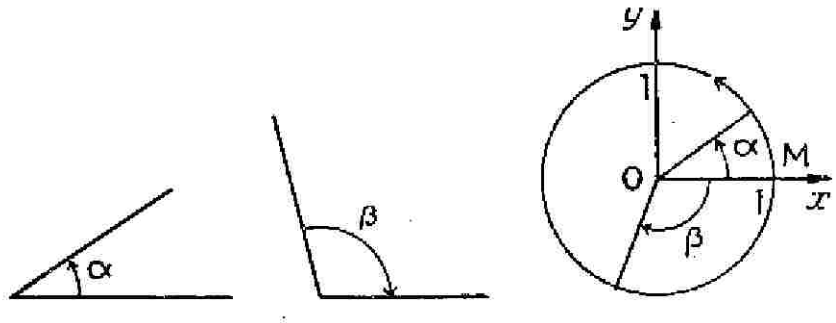
Indicando como es usual, cada lado de un triángulo con la misma letra minúscula que la del vértice opuesto, las definiciones anteriores se escriben así :

cosB = c/a ; sin B = b/a ; tg B = b /c ; cotg B = c/b

Las *colíneas* (coseno, cotangente y cosecante) de un ángulo, son iguales a las respectivas *líneas* (seno, tangente y secante) *de su complemento,* es decir*:*

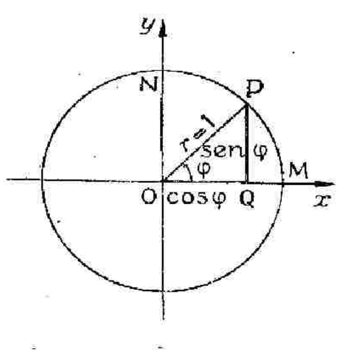
cosB = sen (90º - B) ; cotg b = tg (90º -B); cosec B = sec (90º -B)

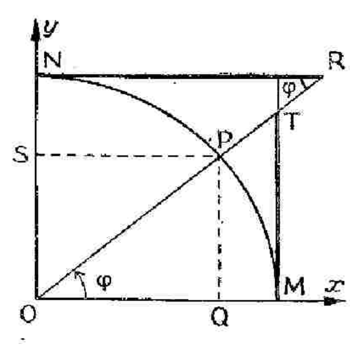
4. Líneas Trigonométricas de un ángulo cualquiera.
Se llama circunferencia trigonométrica o circunferencia unidad, a una circunferencia de radio R = 1, con centro en el origen O de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, y sobre la cual se ha elegido un sentido positivo de recorrido, el contrario al de las agujas de un reloj.



Angulos, α positivo y β negativo , luego ambos centrados en la circunferencia unidad.

En la figura podemos observar que al centrar un ángulo en la circunferencia trigonométrica, lo colocamos a partir del eje Ox, por esta razón el punto M se llama origen de los arcos.
A cada ángulo orientado φ centrado en la circunferencia trigonométrica, corresponde un punto P de la circunferencia, cuyas coordenadas se llaman coseno y seno del ángulo.





abcisa de P : $x = OQ = \cos \varphi$
ordenada de P: $y = QP = \operatorname{sen} \varphi$

Trazando las tangentes a la circunferencia trigonométrica, por sus intersecciones M y N con los ejes de coordenadas, y prolongando el radio OP hasta cortarlas en los puntos T y R, podemos definir las demás funciones trigonométricas así :

$$\text{tg } \varphi = MT$$

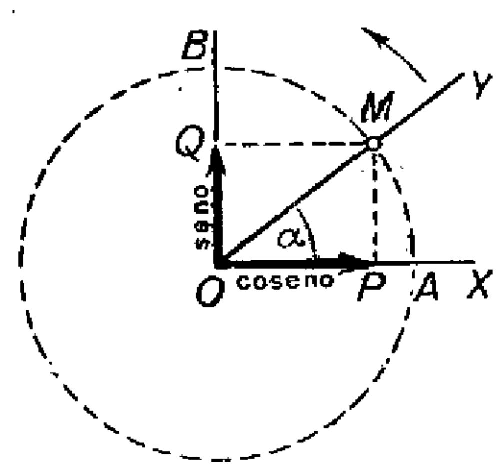
$$\text{cotg } \varphi = NR$$

$$\sec \varphi = OT$$

$$\text{cosec } \varphi = OR$$

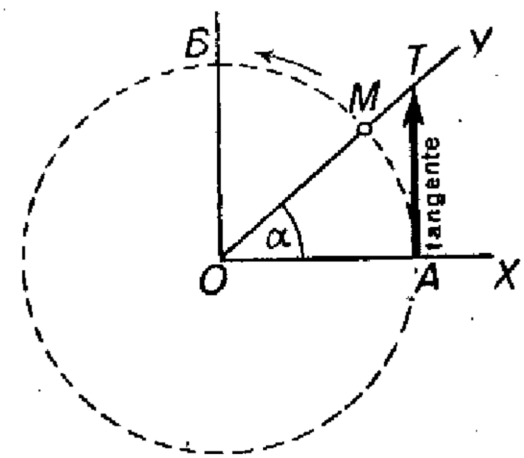
Por su relación con la circunferencia, las funciones trigonométricas se llaman también funciones circulares.

Analicemos un poco las variaciones de las funciones trigonométricas.

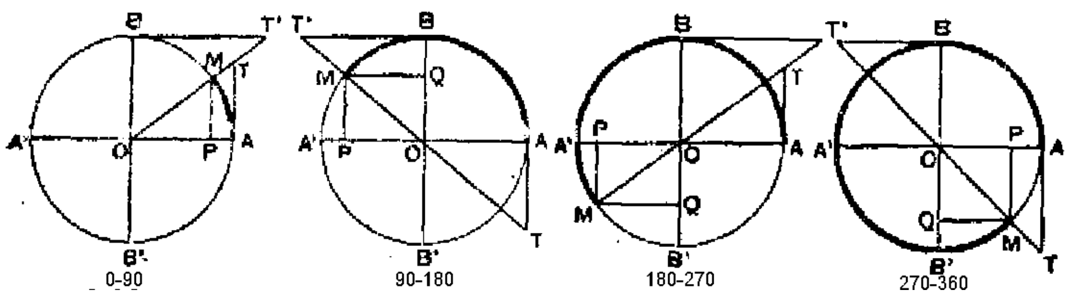


- El seno y coseno de un ángulo menor a 90º tienen valores contrarios, seno φ parte de cero y crece hasta el valor 1, mientras que el coseno parte de uno y decrece hasta llegar a cero, por tanto seno 90º = 1 ; coseno 90º = 0

Por otro lado, veamos la variación de la tangente y cotangente.



- Cuando el ángulo φ crece desde 0º hasta 90º, su tangente parte del valor cero, crece y aumenta indefinidamente.

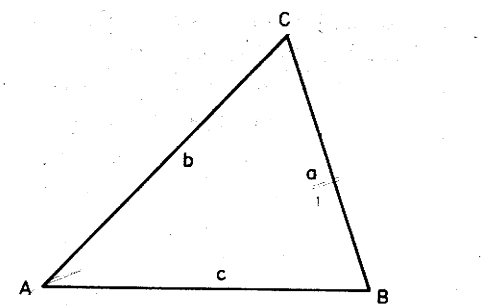


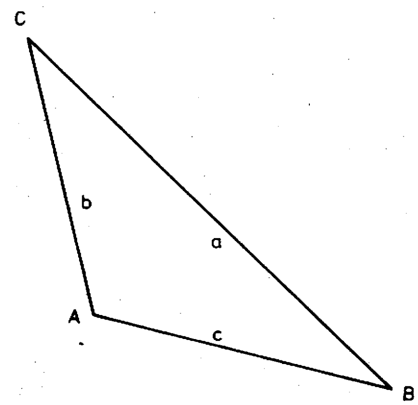
5. Teoremas relativos a Triángulos.
Para cualquier triángulo se cumplen los tres teoremas siguientes

5.1 Teorema del Seno

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donde obviamente. las igualdades deben ser tomadas de a dos





5.2 Teorema del coseno

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b\,c \cos A}$$

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a\,c \cos B}$$

$$\mathbf{c^2 = b^2 + a^2 - 2 \times a\,b \cos C}$$

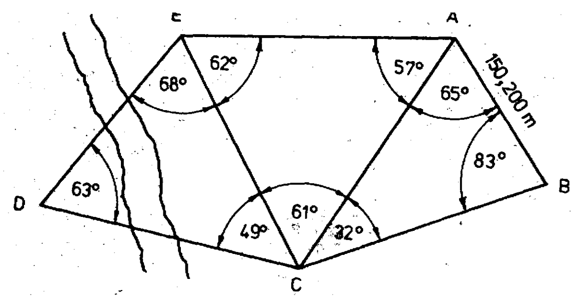
5.3 Fórmula de Herón

Area del triángulo en función de la longitud de los lados, se calcula con el semiperímetro p; donde

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ Area $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Como aplicación topográfica de los teoremas anteriores, veremos unos ejemplos.

1)En un esquema de triangulación sencillo se han reunido varios triángulos para dar la figura que sigue. La base AB se ha medido con cinta métrica con precisión y los ángulos de los distintos triángulos mediante un teodolito. La distancia buscada es la distancia D E a través del río.



Solución

En el triángulo

$$ABC \ \frac{AC}{\text{sen}\,83°} = \frac{AB}{\text{sen}\,32°} \quad \text{(Regla del seno)}$$

$$AC = \frac{AB\ \text{sen}\,83°}{\text{sen}\,32}$$

En el triángulo

$$ACE \ \frac{CE}{\text{sen}\,57°} = \frac{AC}{\text{sen}\,62°} \quad \text{(Regla del seno)}$$

$$CE = \frac{AC\ \text{sen}\,57°}{\text{sen}\,62°}$$

En el triángulo

$$DEC \ \frac{DE}{\text{sen}\,49°} = \frac{CE}{\text{sen}\,63°} \quad \text{(Regla del seno)}$$

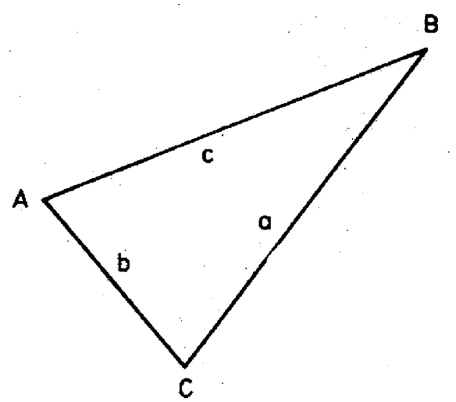
$$DE = \frac{CE\ \text{sen}\,49°}{\text{sen}\,63°}$$

$$DE = \frac{\text{Sen}\,49°\ \text{Sen}\,57°\ \text{Sen}\,83° \times 150{,}200}{\text{Sen}\,63°\ \text{Sen}\,62°\ \text{Sen}\,32°}$$

$$= \underline{226{,}36\ \text{m}}$$

2) Sabiendo los lados de un terreno triangular abajo mostrado, ¿cuál es el ángulo en C ?

AB = 210 m   AC = 110 m   y   BC = 205 m

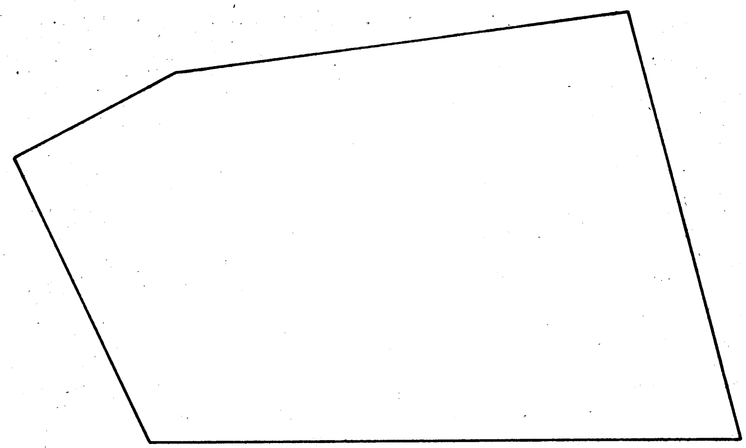


Por el teorema del coseno Cos C = $(a^2 + b^2 – c^2)/ (2\ a\ b\ )$

O sea   Cos C = $205^2 + 110^2 - 210^2 / 2 \times 205 \times 110$

Angulo C = Arcos 0,2223 $\Rightarrow$ 77º 09´24”

3) Un pequeño lote para una edificación tiene la forma poligonal mostrada en la figura a escala 1 : 500. Calcular el área en metros cuadrados.

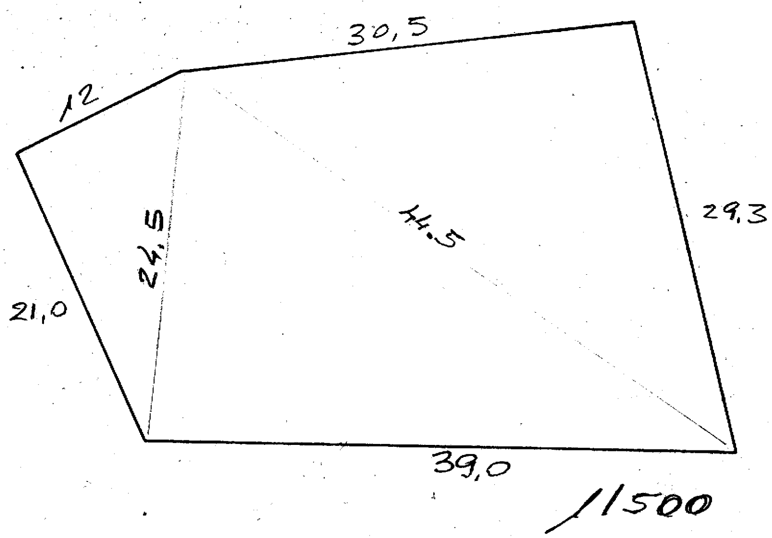


Empezando por el lado superior y en sentido horario, mediante una regla milimetrada los lados del polígono miden , 12 m, 30.5 m, 29.3 m, 39.0 m y 21.0 m

Realizando una división de la figura en triángulos como los mostrados en la figura siguiente, aplicando la fórmula de Herón resultará el área siguiente

Area 1 ; semiperímetro p = $\frac{12 + 24.5 + 21}{2} \Rightarrow$ 28,750m

Area 1 = $\sqrt{\{28.75 \text{ x}(28.75-12)(28.75-24.5)(28.75-21.0)\}} \Rightarrow$ 125,942 m^2



Si las cuentas le resultan "pesadas" consulte los apuntes de notación RPN y baje de Internet[1] la máquina Excalibur, la cual trae programada en el item Geometría, la fórmula de Herón. Realizando este ejercicio, podrá apreciar las ventajas del sistema de notación polaca inversa (RPN).

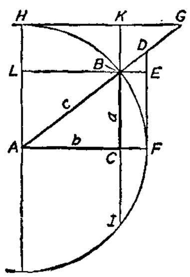
Así el Area 2 = 476,448 m ^{2} y el Area 3 = 444,253 m ^{2} ;

por tanto el área del pequeño lote será de Area 1 + Area 2 + Area 3 = 1.046,643 m ^{2}.-

Finalmente, deseamos agregar un listado de fórmulas tomadas del excelente libro de texto de Topografía [2]

[1] http:// www.geocities.com/dbergis/freeware.htm o también www.bossintl.com/0520039a.html
[2] Brinker &Wolf 1982. "Topografía Moderna" Harper&Row Latinoamericana, México, 542 p.-

FORMULAS TRIGONOMETRICAS PARA
TRIANGULOS RECTANGULOS



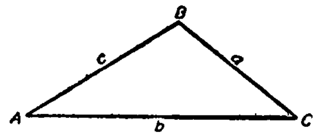
$A =$ ángulo $BAC =$ arcoBF, y radio $AF = AB = AH = 1$. En consecuencia,

sen $A = BC$	csc $A = AG$
cos $A = AC$	sec $A = AD$
tan $A = DF$	cot $A = HG$
vers $A = CF = BE$	covers $A = BK = LH$
exsec $A = BD$	coexsec $A = BG$
cuerda $A = BF$	cuerda 2 $A = BI = 2\ BC$

En el triángulo rectángulo ABC, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Por tanto,

1. $\text{sen } A = \frac{a}{c}$
2. $\cos A = \frac{b}{c}$
3. $\tan A = \frac{a}{b}$
4. $\cot A = \frac{b}{a}$
5. $\sec A = \frac{c}{b}$
6. $\csc A = \frac{c}{a}$
7. $\text{vers } A = 1 - \cos A = \frac{c-b}{c} = \text{covers } B$
8. $\text{exsec } A = \sec A - 1 = \frac{c-b}{b} = \text{coexsec } B$
9. $\text{covers } A = \frac{c-a}{c} = \text{vers } B$
10. $\text{coexsec } A = \frac{c-a}{a} = \text{exsec } B$
11. $a = c \text{ sen } A = b \tan A$
12. $b = c \cos A = a \cot A$
13. $c = \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\cos A}$
14. $a = c \cos B = b \cot B$
15. $b = c \text{ sen } B = a \tan B$
16. $c = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\text{sen } B}$
17. $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c-b)(c+b)}$
18. $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)}$
19. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
20. $C = 90° = A + B$
21. $\text{Area} = \frac{1}{2}ab$

FORMULAS TRIGONOMETRICAS
PARA TRIANGULOS OBLICUANGULOS



No.	Datos	Incógnitas	Fórmula
22	A, B, a	C, b, c	$C=180°-(A+B)$
			$b=\frac{a}{\operatorname{sen} A}\times \operatorname{sen} B$
			$c=\frac{a}{\operatorname{sen} A}\times \operatorname{sen}(A+B)=\frac{a}{\operatorname{sen} A}\times \operatorname{sen} C$
		Area	$\text{Area}=\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C=\frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$
23	A, a, b	B, C, c	$\operatorname{sen} B=\frac{\operatorname{sen} A}{a}\times b$
			$C=180°-(A+B)$
			$c=\frac{a}{\operatorname{sen} A}\times \operatorname{sen} C$
		Area	$\text{Area}=\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$
24	$C, a, b,$	c	$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$
25		$\frac{1}{2}(A+B)$	$\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$
26		$\frac{1}{2}(A-B)$	$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\times \tan\frac{1}{2}(A+B)$
27		A, B	$A=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B)$
			$B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)$
28		c	$c=(a+b)\times\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}=(a-b)\times\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}$
29		Area	$\text{Area}=\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$
30	a, b, c	A	Sea $s=\frac{a+b+c}{2}$
31			$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$
			$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$
			$\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
32			$\operatorname{sen} A=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$
			$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
33		Area	$\text{Area}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$